MODELAGEM DIRECIONADA EM AULAS DE MATEMÁTICA

Dr. Dimas Felipe de Miranda
DME - PUC Minas
mestradoensino@pucminas.br

(Este artigo consta dos Anais do IV EEMOP/2009 – UFOP/MG)

1- INTRODUÇÃO

Atualmente, quando se aborda o tema modelagem em aulas de matemática, surgem inquietantes dúvidas, por parte dos professores. O que é modelagem? Onde fazer modelagem? Quando e como a fazer modelagem? Tal atividade seria realmente uma modelagem?

Vários autores que lidam com a modelagem no ensino e na educação matemática discutem estas questões. Entre os mais citados, destacam-se Bassanezi (2002), tratando mais de assuntos da matemática universitária, e Biembengut (2004), da matemática básica.

Não se propõe, aqui, discorrer sobre tais questões, mas assumir uma concepção e alguns objetivos da modelagem no ensino e, a partir disto, deixar registrados alguns conceitos relativos às características dos modelos e apresentar algumas experiências realizadas em aulas de matemática. A intenção nessas aulas foi sempre a de tornar o ensino de matemática mais inserido na área de interesse do aluno, o que, em geral, resulta em um engajamento maior do estudante com a aprendizagem.

Este trabalho relata uma experiência com modelagem direcionada ao estudo de curvas planas, com foco em suas equações e gráficos. Desde o início do curso, foi pedido aos alunos que passassem a observar na paisagem da cidade objetos e equipamentos móveis ou imóveis, cujas linhas de contorno tivessem conformações possíveis de serem modeladas por curvas que estudaríamos em sala.

2- ASSUMINDO UMA CONCEPÇÃO DE MODELAGEM E ALGUNS OBJETIVOS

Muito do que se lê na literatura sobre a metodologia ideal para modelagem matemática no ensino e os relatos de algumas experiências realizadas levam um professor comum a inferir que isto só é possível em situações especiais. Trabalhar com modelagem matemática no ensino é praticamente levar o aluno, de preferência como membro de um grupo, a perfazer os caminhos de uma pesquisa científica. Os alunos devem escolher uma situação problemática real; discuti-la no grupo e com professor; delimitá-la; referenciá-la teoricamente; formular uma pergunta ou uma questão principal e algumas outras pertinentes, formular o modelo, resolvê-lo e validá-lo. Diante de tudo isto, o professor que muitas vezes até desejaria experimentar a modelagem com seus alunos, teme assumir tal compromisso. Falta-lhe disponibilidade para acompanhar os grupos; a carga horária é pequena; os temas podem exigir do professor estudos novos e pesquisa de estratégias especiais; a escola tem um programa a ser cumprido; há um número excessivo de alunos em sala, etc...

Não se negam as etapas de uma metodologia ideal para a modelagem matemática no ensino. Elas trazem uma contribuição enorme ao aprendizado, mas devem ser realizadas dentro de um projeto, com tempo e recursos pré-determinados para tal. Assim, a pergunta que se colocou nesta experiência foi: como seria trabalhar uma modelagem direcionada a assuntos e/ou em forma de atividade no reduzido tempo de aula, em situações adversas?
A experiência relatada neste trabalho expõe uma tentativa de se trabalhar com modelagem em sala de aula, ao lado de todas as dificuldades anteriormente expostas.

Como concepção, foi assumido neste trabalho, na linha de Barroso (1987), que a modelagem é, simplesmente, a fase destinada a se obter um modelo matemático. Por sua vez, o modelo matemático é um descritor do comportamento de um determinado problema real, ou sistema físico. Conforme as características matemáticas do descritor, ou interesse do problema, pode haver ainda a demanda por uma resolução. Então, a resolução é a fase de obtenção da solução do modelo, através da aplicação de métodos matemáticos (algébricos, geométricos, numéricos, algorítmicos etc...). A última fase consiste na análise, teste e avaliação do modelo, acarretando, em algumas situações, o surgimento de outros problemas e situações que podem sugerir a pesquisa de novos modelos.

A concepção assumida parece alinhar-se com o que Biembengut (2004) chama de "essência da modelagem". Quanto aos objetivos, a experiência aqui relatada se propôs a não perder a linha mestra da modelagem. Objetivou-se: a) promover o espírito de observação e de investigação dos alunos e, por conseqüência, do próprio professor; b) levar os alunos a conhecerem e lidarem com modelos e, posteriormente, elaborarem os seus; c) utilizar os horários normais de aulas para orientar e/ lidar com modelagem reduzida; d) direcionar a modelagem aos assuntos do programa da disciplina, com cronograma estabelecido.

A metodologia adotada, em conformidade com os objetivos expostos, pode ser chamada de modelagem direcionada. Delimita-se um tópico matemático, objeto de estudo teórico em sala de aula, por um certo período de dias. Enquanto o tópico é desenvolvido em sala, o alunado deve observar situações que podem ser modeladas com os elementos estudados. Concomitantemente, pode ser levado para a sala de aula um ou outro exemplo de modelo pronto, para ser discutido. Pode-se também propor, em formato de atividade, situações simples de modelagem, para ser feita em sala. O importante é que os exemplos de modelos discutidos e as atividades instiguem a criatividade e a investigação dos alunos, e não lhes retire a oportunidade de realizar sua própria modelagem de forma personalizada.

3- MODELOS COMO APROXIMAÇÕES DA REALIDADE

No que se refere aos modelos, os autores são unânimes em admiti-los como demonstrações da capacidade de abstração do ser humano, frente ao mundo real, e cuja descrição é sempre uma tarefa desafiadora.

Pode-se afirmar que

> um modelo é uma estruturação simplificada da realidade que apresenta, supostamente, características ou relações sob forma generalizada. Os modelos são aproximações altamente subjetivas, no sentido de não incluírem todas as observações, mensurações e medições associadas, mas, como tais, são valiosos por ocultarem detalhes secundários e permitirem o aparecimento dos aspectos fundamentais da realidade. (Hagget & Chorley, 1975, apud MIRANDA, 1999).

Reafirmando o caráter de aproximação dos modelos, Barroso(1987) escreveu: “Ao se tentar representar um fenômeno do mundo físico por meio de um modelo matemático, raramente se tem uma descrição correta desse fenômeno”. E acrescenta que freqüentemente “são necessárias várias simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo matemático com o qual se possa trabalhar.” Ele exemplifica tal fato, usando uma equação elementar que é um modelo do movimento de um corpo em queda livre:

$$d = d_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

d = distância percorrida; d_0 = distância inicial; v_0 = velocidade inicial

t = tempo; a = aceleração

Suponha-se que só se possa calcular a altura de um prédio a partir do modelo acima. Então, se um indivíduo **A** registrasse em seu cronômetro o tempo que uma bola de metal leva para cair do topo do prédio até o solo, como sendo, por exemplo, de 3 segundos, tem-se, conforme a equação acima:

$$d = 0 + 0.3 + \frac{1}{2}.9{,}8.3^2 = 44{,}1 \text{ metros}$$

Conclui-se que o prédio deveria medir em torno de 44,1 metros.

Barroso (1987) comenta que o modelo matemático apresentado é bem simplificado, não considera a velocidade do vento, a resistência do ar, etc. Portanto, o resultado de 44,1 metros, para a altura do prédio do problema, é apenas uma aproximação.

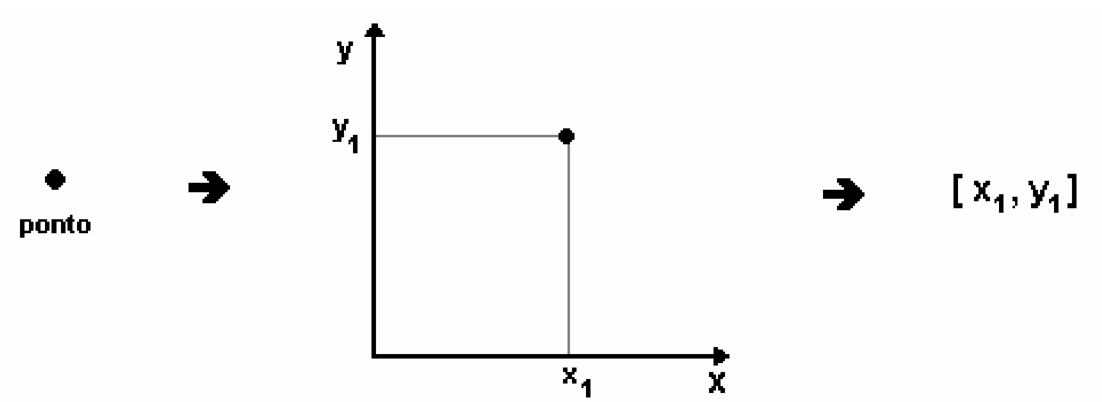
Os dados de entrada de um problema também podem exercer grandes influências no resultado final de um processo. Assim, no problema anterior, Barroso(1987) registra, a título de curiosidade, que se um indivíduo **B**, observando o mesmo fenômeno que o indivíduo **A** anteriormente observou, registrasse em seu cronômetro a leitura do tempo de queda da bola de metal como 3,5 segundos em vez de 3 segundos, o modelo forneceria d = 60 m para a altura do prédio, em vez de 44,1m, o que constitui uma diferença muito significativa.

Neste caso, trata-se de uma instabilidade do processo com origem na coleta de dados de entrada. Embora os modelos tenham sempre um caráter de aproximação, compete ao pesquisador, estar atento e zelar para que os erros do resultado da aplicação de um modelo sejam minimizados.

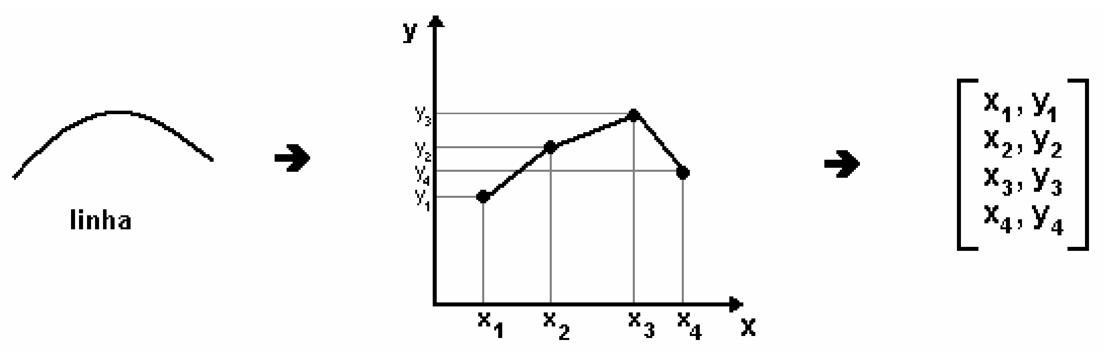
No exemplo do modelo algébrico anterior, por ser possível a manipulação numérica para testá-lo, torna-se fácil perceber que sempre existe um certo grau de fragilidade inerente ao modelo, no que se refere ao aspecto de aproximação.

Numa modelagem geométrica de objetos reais, o caráter de aproximação também está sempre presente no modelo da representação do mundo físico. Inicialmente, tem-se o mundo físico, cujas linhas de contorno são aproximações, representadas no papel por pontos, linhas e/ou áreas, advindos de fotografias ou de desenhos. A passagem para a matemática se faz, mais uma vez, de forma aproximada, através de pontos, linhas poligonais e/ou polígonos, com uso de coordenadas cartesianas (x, y). Esta forma de passagem chama-se Método Vetorial, conforme Miranda, 1999. (FIGURA 2.1, a – c)

a)



b)



c)

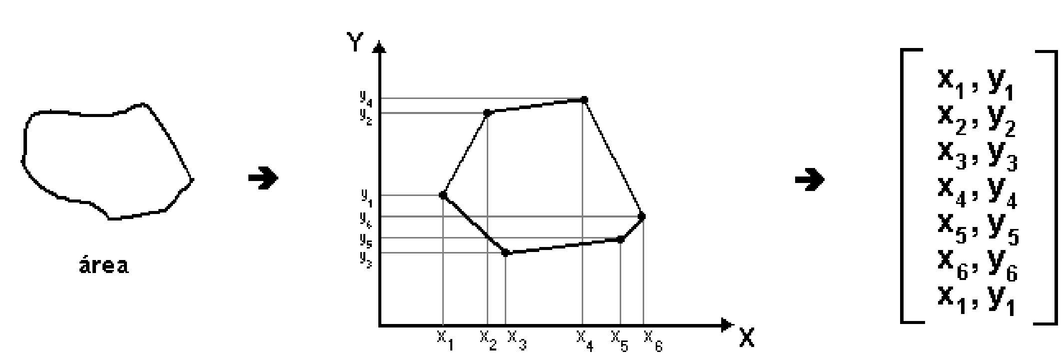


FIGURA 2.1 (a – c) – *Modelos de aproximação e representação do mundo físico.*

Quanto aos tipos de modelos, Miranda, 1999, afirma que Hagget&Chorley, 1975, classificam-nos:

A) Quanto ao meio de construção do modelo:

A1) Físicos:

A1.1- Icônicos (representam as propriedades do mundo real em escala diferente). Por exemplo: mapas e maquetes;

A1.2- Analógicos (usam propriedades diferentes para representar o mundo real). Por exemplo: relógios e bússolas.

A2) Teóricos:

A2.1- Verbais (usam afirmações simbólicas, verbais ou mentais). Por exemplo: pintura, poesia e música;

A2.2- Matemáticos (usam equações, podendo ser determinísticos ou estocásticos). Por exemplo: teorema de Pitágoras, modelo de distribuição normal de Gauss e modelo gravitacional.

B) Quanto ao fator tempo:

B1) Estático (retrata um determinado momento)

B2) Dinâmico (descreve a evolução do sistema no tempo)

Os alunos, no processo de modelagem da experiência deste trabalho, partiram de um objeto real, tomando sua representação por modelos físicos icônicos, obtendo-se finalmente sua representação teórica, na forma matemática, através de equações e funções. A passagem para a matemática se fez, de forma aproximada através de pontos e linhas poligonais, com uso de coordenadas cartesianas (x, y).

4- ATIVIDADES DA MODELAGEM DIRECIONADA

O processo ensino/aprendizagem é constituído de unidades, e estas de atividades ou tarefas, onde estão sempre vinculados, ainda que implicitamente, um planejamento, uma aplicação e uma avaliação, conforme afirma Zabala (1998). As atividades acontecem antes, durante e após uma aula. Ele lista como atividades, por exemplo, a exposição, uma ação motivadora, uma observação, um tomar notas, uma aplicação, um exercício, um estudo, uma avaliação, entre muitas outras.

Assim, a unidade que foi chamada de modelagem direcionada neste trabalho constou de atividades, distribuídas nas seguintes etapas: exposição, observação, motivação, realimentação da motivação, aplicação e avaliação.

a) **Exposição, motivação e observação**. Na primeira aula, o professor expôs aos alunos os capítulos a serem estudados. Discorreu sobre modelagem e procurou motivá-los a observar, a partir daquele dia, na paisagem da cidade, objetos e equipamentos móveis ou imóveis, relacionados aos interesses da área de formação, cujas linhas de contorno tivessem conformações possíveis de serem modeladas por curvas que estudaríamos em sala. O trabalho de modelagem seria feito em grupos de 5 alunos e, em data previamente marcada, esta atividade seria objeto de avaliação. As aulas seguintes tiveram prosseguimento normal, foram focados os assuntos sobre domínios, imagens e gráficos de funções usuais, mesclados com geometria analítica introdutória. Eram evidentes a motivação, a curiosidade, (ou até alguma ansiedade) dos alunos ao realizarem perguntas em sala, na tentativa de se fazer uma leitura matemática de um abjeto já observado. As aulas ficaram bastante participativas.

b) **Realimentação da motivação**. Como exemplo, o professor levou para a sala de aula a atividade listada a seguir, para ser resolvida, individualmente, pelos alunos:

Atividade

1- Faça, em um único sistema cartesiano, a representação geométrica (gráfica) do modelo matemático determinado pelas 18 equações abaixo. Use papel A4, tomando a origem no centro da folha. A escala será tal que cada unidade corresponda a 4,5cm de sua régua.

a) $y=3$, se $-2\leq x\leq 2$
b) $y=1{,}5$, se $1\leq x\leq 2$
c) $y=0$, se $-1\leq x\leq 1$
d) $y=-1{,}5$, se $-2\leq x\leq -1$
e) $y=-3$, se $-2\leq x\leq 2$
f) $x=-2$, se $-3\leq y\leq 3$
g) $x=-1$, se $-1{,}5\leq y\leq 0$
h) $x=0$, se $-3\leq y\leq 3$
i) $x=1$, se $0\leq y\leq 1{,}5$
j) $x=2$, se $-3\leq y\leq 3$

k) $y=(3x)/2 + 3$, se $-2\leq x \leq 0$

l) $y=(3x)/2 + 3/2$, se $-1\leq x \leq 0$

m) $y=(-3x)/2 + 3$, se $0\leq x \leq 2$

n) $y=(-3x)/2+3/2$, se $0\leq x \leq 1$

o) $y=(-3x)/2 - 3$, se $-2\leq x \leq 0$

p) $y=(-3x)/2 - 3/2$, se $-1\leq x \leq 0$

q) $y=(3x)/2 - 3$, se $0\leq x \leq 2$

r) $y=(3x)/2 - 3/2$, se $0\leq x \leq 1$

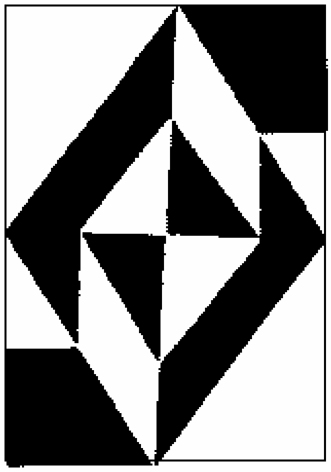
2- Colorir de preto as áreas compreendidas entre as equações:

Área A1: k, l, o, g, h
Área A2: m, b, ,j, a
Área A3: c ,h , n
Área A4: c, h, p
Área A5: m, i, r, q, h
Área A6: e, d, f, o

Essa atividade, por apresentar um modelo matemático (família de equações) já pronto, foi um exemplo, ainda que de forma invertida, daquela atividade que os alunos fariam. Também serviu, praticamente, de uma recreação e o professor teve mais oportunidade de orientar os grupos de alunos.

O professor fez um histórico geral de como confeccionou este modelo matemático e mostrou para os alunos uma foto de um quadro, chamado *Diamante*, do famoso pintor Alfredo Volpi, que foi a sua fonte de observação para a modelagem confeccionada. Solicitou aos alunos que pesquisassem, na internet ou em publicações, sobre as características geométricas presentes nas obras de Volpi.

De posse da solução da atividade (ver figura abaixo), os próprios alunos avaliaram seus desenhos ao compará-los com a foto do quadro original. A maioria deles se sentiram menos ansiosos e mais preparados para realizar suas modelagens, as quais deveriam envolver uma variedade maior de curvas, incluindo até as cônicas.


Diamante: Volpi geométrico

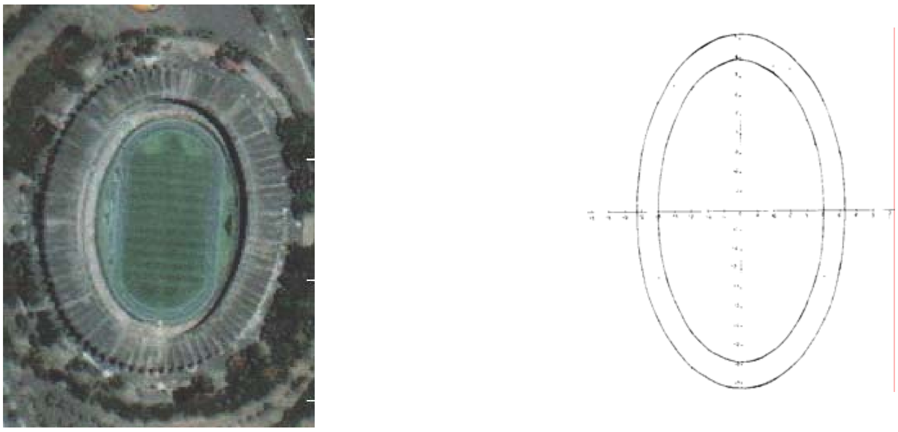
c) **Aplicação e Avaliação.** Considera-se, aqui, como aplicação, o processo de construção do modelo pelos alunos, culminando com o produto final, cuja apresentação pelos elementos de cada grupo se deu em sala de aula, em data previamente marcada. Na fase de socialização, o professor avaliou os trabalhos dos grupos e eles também se auto-avaliaram.

   Registros resumidos de alguns produtos finais (modelos) são apresentados a seguir:

GRUPO X - Modelagem da conformação elíptica do Estádio do Mineirão.

Os alunos escolheram o estádio do Mineirão como objeto físico e decidiram modelar 2 de suas elipses. Uma, delimitando o Estádio internamente e a outra, internamente. Detectaram que os 2 goleiros se colocam nos 2 focos das elipses, lugares de convergência dos olhares e das atenções do público. Com isto, usaram a matemática para justificar, em geral, as distribuições dos assentos nos estádios e as escolhas dos torcedores!

A figura abaixo mostra uma foto do estádio do Mineirão e um rascunho de um primeiro croqui feito pelos alunos, na tentativa de se fazer a passagem do desenho (representação icônica) para a matemática (representação gráfica).



Preparação para a modelagem matemática do Estádio do Mineirão

Equações

Equação geral de Elipse: $\frac{Y^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} = 1$

Elipse Maior

Comprimento real *185 m*

Largura real *127 m*

$D = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, -6{,}3 < x < 6{,}3 \}$

$Im = \{ y \in \mathbb{R} \,/\, -9{,}25 < y < 9{,}25 \}$

Escala (1:100)

Comprimento *18,5 cm*

Largura *12,7 cm*

Equação: $\frac{Y^2}{85{,}56} + \frac{X^2}{40{,}32} = 1$

Elipse Menor

Comprimento real	*158 m*
Largura real	*100 m*

$D = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, -5 < x < 5 \}$

$Im = \{ y \in \mathbb{R} \,/\, -7,9 < y < 7,9 \}$

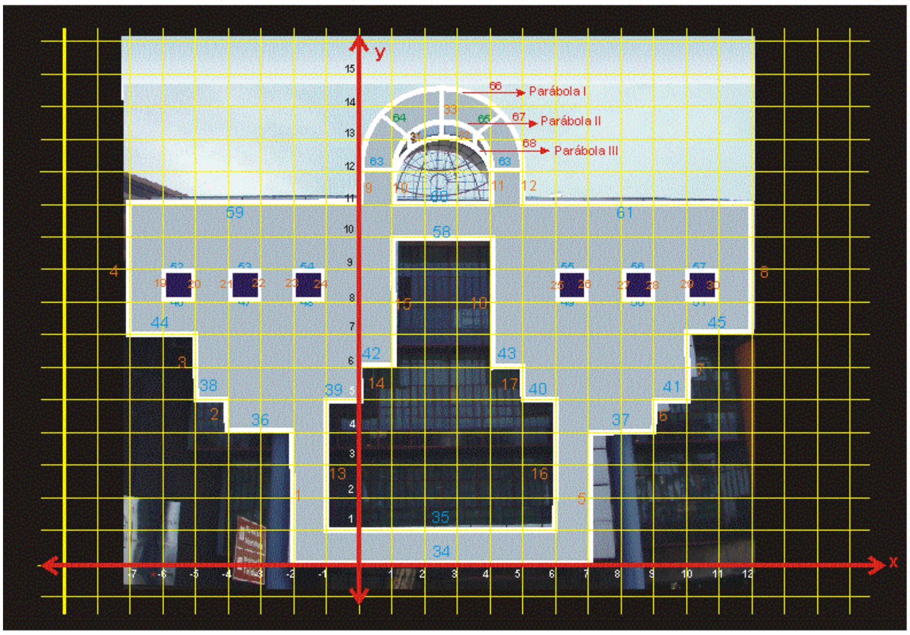
Escala (1:100)

Comprimento	*15,8 cm*
Largura	*10 cm*

Equação: $\dfrac{Y^2}{62,41} + \dfrac{X^2}{25} = 1$

As equações acima constituem um ensaio do modelo matemático para o formato elíptico do Mineirão. As medidas dos eixos foram obtidas utilizando-se da redução em escala, momento em que tiveram de lidar com proporções matemáticas.

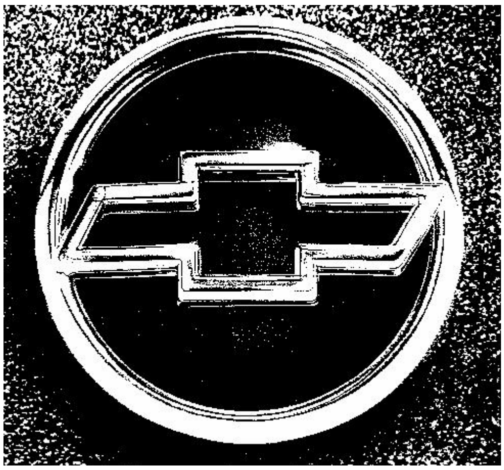
GRUPO Y – Pré-projeto de modelagem da fachada do Edifício Rainha da Sucata - Belo Horizonte.



Na modelagem das formas do edifício Rainha da sucata, este grupo de alunos teve de fazer muitos testes, procurando as melhores curvas de aproximação para a modelagem dos arcos deste edifício. Os debates e dúvidas giraram em torno de alguns questionamentos. Seriam arcos de parábolas? De círculos? Todos concêntricos? Como suavizar as concordâncias dos arcos, entre si, e com os segmentos?

Sobreposto à figura acima, tem-se apenas um primeiro estudo matemático. Várias outras alternativas foram experimentadas pelos alunos.

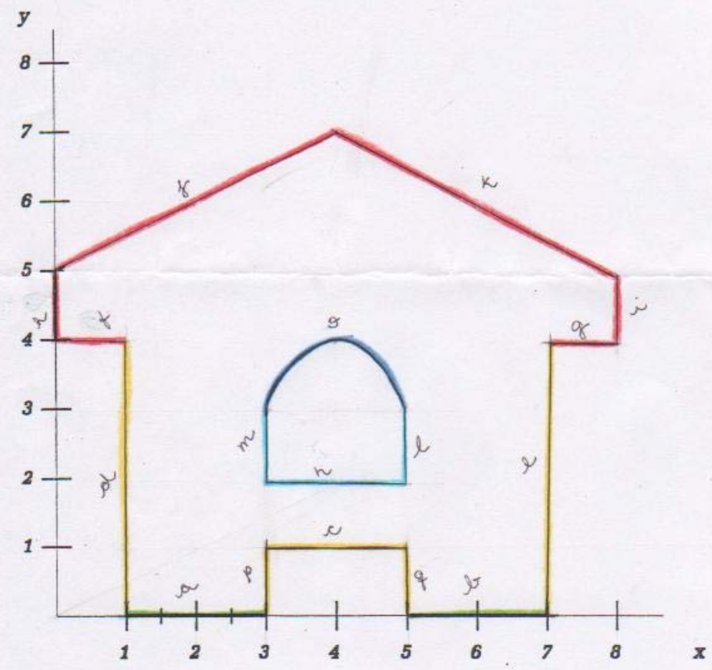
EXERCÍCIO EM AULA 01 – Modelar este conhecido Emblema, abaixo, através de equações, estabelecendo os domínios de cada elemento, conforme a figura. Em seguida, propor um modelo algébrico genérico para se calcular a interseção entre uma reta e circunferência. Discorrer sobre os vários tipos de soluções deste modelo algébrico.



Este foi um exercício feito em uma aula. Um ponto de indecisão dos alunos, em geral, residiu na escolha da origem do sistema de coordenadas. Tiveram alguma dificuldade na sistematização das discussões sobre os tipos de soluções do modelo algébrico.

EXERCÍCIO EM AULA 02 – Faça, no sistema cartesiano abaixo, a representação geométrica (gráfica) do modelo matemático determinado pelas 17 equações dadas.

a) $y = 0$ se $1 \leq x \leq 3$
b) $y = 0$ se $5 \leq x \leq 7$
c) $y = 1$ se $3 \leq x \leq 5$
d) $x = 1$ se $0 \leq y \leq 4$
e) $x = 7$ se $0 \leq y \leq 4$
f) $y = 4$ se $0 \leq x \leq 1$
g) $y = 4$ se $7 \leq x \leq 8$
h) $x = 0$ se $4 \leq y \leq 5$
i) $x = 8$ se $4 \leq y \leq 5$
j) $y = 1/2\,x + 5$ se $0 \leq x \leq 4$
k) $y = -1/2\,x + 9$ se $4 \leq x \leq 8$
l) $x = 5$ se $2 \leq y \leq 3$
m) $x = 3$ se $2 \leq y \leq 3$
n) $y = 2$ se $3 \leq x \leq 5$
o) $y = -x^2 + 8x - 12$ se $3 \leq x \leq 5$
p) $x = 3$ se $0 \leq y \leq 1$
q) $x = 5$ se $0 \leq y \leq 1$



j, $0 \leq x \leq 4$
$y = 1/2\,x + 5$
se $x = 0 \Rightarrow y = 5$
se $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2} = 5{,}5$
se $x = 2 \Rightarrow y = 1 + 5 = 6$
se $x = 3 \Rightarrow$ ...
se $x = 4 \Rightarrow y = 2 + 5 = 7$

k, $4 \leq x \leq 8$
$y = -1/2\,x + 9$
se $x = 4 \Rightarrow y = -2 + 9 = 7$
se $x = 6 \Rightarrow y = -3 + 9 = 6$
se $x = 8 \Rightarrow y = -4 + 9 = 5$

o, $3 \leq x \leq 5$
$y = -x^2 + 8x - 12$
se $x = 3 \Rightarrow y = -9 + 24 - 12 = -9 + 12 = 3$
se $x = 4 \Rightarrow y = -16 + 32 - 12 = -16 + 20 = 4$
se $x = 5 \Rightarrow y = -25 + 40 - 12 = -37 + 40 = 3$

5- CONCLUSÃO

Este tipo de experiência com modelos vem sendo feita, nas primeiras semanas de aulas, com os alunos de pelo menos uma turma do primeiro período de um curso superior, há alguns semestres. Como se falou na introdução, a intenção nessas aulas foi sempre a de tornar o ensino de matemática mais inserido na área de interesse do aluno, o que, em geral, resulta em um engajamento maior de uma boa parte dos estudantes com a aprendizagem, objetivo primeiro de qualquer processo educativo.

De nenhum modo a modelagem, até o momento, e a partir destas experiências, pode ser apontada como um meio de se ensinar matemática. Tem sido um método ou estratégia interessante, e, às vezes, tida como agradável, por muitos alunos, de se aplicar a matemática. O que se testemunha é que muitos alunos desenvolvem ou passam a manifestar um espírito investigativo e ganham potencial para relacionar conteúdos, antecipá-los, detectar padrões e descobrir propriedades matemáticas em objetos e situações da realidade.

REFERÊNCIAS

BARROSO, Leônidas C. **Cálculo numérico**. São Paulo: Harbra, 1987.

BASSANEZI, Carlos R**. Ensino-apendizagem com modelagem matemática**- São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria S. M**odelagem matemática & implicações no ensino e na aprendizagem matemática.** Blumenau: Edfurb, 2004.

MIRANDA, Dimas F. **Geometria táxi, uma métrica para os espaços geográficos e urbanos -** uma análise exploratória. Belo Horizonte: PUC-MG, 1999.

ZABALA, Antoni. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998.